



TITLE:

# Cartan-Behnke-Steinの定理の拡張 (「複素解析とその応用」研究会報告 1)

AUTHOR(S):

梶原, 壤二

---

CITATION:

梶原, 壤二. Cartan-Behnke-Steinの定理の拡張 (「複素解析とその応用」研究会報告 1). 数理解析研究所講究録 1966, 13: 1-20

ISSUE DATE:

1966-06

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/107412>

RIGHT:

# Cartan-Behnke-Stein の定理の拡張

九州大学 梶 原 肇 二  
理 学 部

は し が き

Oka [14] は  $C^n$  の正則領域が Cousin-I 型領域であることを示した。逆に Cartan [5] は  $C^2$  の Cousin-I 型領域は正則領域であると述べ、Behnke-Stein [2] が証明を与えた。Cartan [6] によれば  $C^3 - \{(0, 0, 0)\}$  は正則領域でない Cousin-I 型領域であり、Thullen [16] によれば  $C^2 - \{(0, 0)\}$  は正則領域でない Cousin-II 型領域である。この二つの事柄は上述の Cartan-Behnke-Stein の定理は、 $n \geq 3$  のとき  $C^n$  の Cousin-I 型領域、 $n \geq 2$  のとき  $C^n$  の Cousin-II 型領域に対して、直接の形では一般化できないことを示す。本講演の目的は次の様な形で Cartan-Behnke-Stein の定理を拡張することにある：

$L$  を可換な複素 Lie 群、 $\mathcal{O}_L$  を  $L$  に値を持つ正則写像芽全体の可換群の層とする。まず  $H^1(D, \mathcal{O}_L) = 0$  をみたす  $C^2$  の上の領域  $(D, \varphi)$  は正則領域である。

次に  $\{(D_p, \varphi_p)\}$  を Stein 多様体上の領域の増加列、 $(D, \varphi)$  をその極限とする。 $D$  が単連結、即ち  $D$  の基本群  $= 0$  のときは (標準的写像  $H^2(D, \mathcal{O}_L) \rightarrow \lim H^2(D_p, \mathcal{O}_L)$ ) は単射である。これらを用いると次の結果を得る：

$D$  が滑らかな境界をもつ  $C^n$  内の領域で、すべての単連結相対コンパクト多重円筒  $P$  に対して  $H^1(D \cap P, \mathcal{O}_L) = 0$  をみたすとき、 $D$  は正則領域である。

なお最初および最後の命題は  $L = GL(p, C)$  に対しても成立する。

## § 1. $H^1(D, \mathcal{O}_L) = 0$ をみたす領域と正則領域の関係

補題 1.  $\mathcal{F}$  を位相空間  $X$  の上の群の層、 $\mathcal{U} = \{U_i; i \in I\}$  を  $X$  の開被覆とする。標準的写像  $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{F})$  は単射である。

証明 cocycles  $\{f_{ij}\}, \{g_{ij}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$  に対して、 $X$  の開被覆  $= \{V_k; k \in K\}$ , cochain  $\{f_k\} \in C^0(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ , 写像  $\rho: K \rightarrow I$  で条件

$$(1) V_k \subset U_{\rho(k)}, \quad \forall k \in K, (2) f_k^{-1} f_{\rho(k\ell)} f_{\ell} = g_{\rho(k\ell)}$$

(ただし  $\rho(k\ell) = \rho(k)\rho(\ell)$ )。 (3)  $\rho$  は全射。

を満たすものがあるでしょう。任意の  $i \in L$  に対して,  $\rho(k) = i$  をみたす  $k \in K$  を考え, 固定する。  $U_i$  の任意の点  $x$  に対して,  $x \in V_\ell \in \mathcal{V}$  なる  $\ell \in k$  がある。  $\rho(\ell) = j$  とおき,  $U_i \cap V_\ell (\subset U_i \cap U_j)$  上にて

$$F_i(x) = f_{ij}(x) f_\ell(x) (g_{ij}(x))^{-1}$$

とおくと,  $\{F_i\} \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$  はうまく定義できて, 任意の  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  の上で

$$F_i^{-1} f_{ij} F_j = g_{ij}$$

をみたす。

補題 2.  $L$  を可換な複素 Lie 群,  $L_e$  を neutral element  $e$  を含む  $L$  の連結成分,  $D$  を連結な複素多様体とする。標準的写像  $H^1(D, \mathcal{O}_{L_e}) \rightarrow H^1(D, \mathcal{O}_L)$  は単射である。

証明  $\mathcal{U} = \{U_i; i \in I\}$  を各  $U_i$  が連結であるような  $D$  の開被覆とする。cocycle  $\{f_{ij}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{L_e})$  が  $\{f_i\} \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}_L)$  の coboundary であるならば,  $\mathcal{U}$  の一つの  $U_{i_0}$  の一点  $x_0$  に対して, 各  $U_i$

$$g_i(x) = f_i(x) (f_{i_0}(x_0))^{-1}$$

とおくと,  $\{f_{ij}\}$  は  $\{g_i\} \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{L_e})$  の coboundary である。

複素多様体  $D$  より複素多様体  $M$  の中への局所両正則写像  $\varphi$  があるとき,  $(D, \varphi)$  を  $M$  の上の開集合といい特に  $D$  が連結のとき,  $M$  の上の領域という。基本群が 0 であるような連結な複素多様体は単連結であるといわれる。  $(D, \varphi)$  を  $M$  の上の領域,  $\mathcal{F}$  を  $D$  上の正則函数のある族とする。次の条件をみたす  $(\lambda, \tilde{D}, \tilde{\varphi})$  または単に  $(\tilde{D}, \tilde{\varphi})$  を  $(D, \varphi)$  の  $\mathcal{F}$  に関する正則被という:

- (1)  $\lambda$  は  $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \lambda$  をみたす正則写像である。(このとき  $\lambda$  を  $(D, \varphi)$  より  $(\tilde{D}, \tilde{\varphi})$  の中の写像とよぶ。)
- (2) 任意の  $f \in \mathcal{F}$  に対して,  $f = \tilde{f} \circ \lambda$  をみたす  $\tilde{f}$  がある。(このとき  $\tilde{f}$  を  $f$  の  $\tilde{D}$  への解析接続とよぶ。)
- (3) (1), (2) をみたす任意の  $(\lambda', D', \varphi')$  (これを  $(D, \varphi)$  の  $\mathcal{F}$  に関する解析的拡大という) に対して,  $(D', \varphi')$  より  $(\tilde{D}, \tilde{\varphi})$  の中への写像  $\psi$  で,  $\lambda = \psi \circ \lambda'$  をみたし  $(\psi, \tilde{D}, \tilde{\varphi})$  が  $\mathcal{F}$  の元の  $\tilde{D}$  への接続全体の作る族に関する  $(D, \varphi)$  の解析的拡大となるようなもの

がある。

正則被の一意的存在はCartan [7] が示している。特に  $D$  上の一つの正則函数  $f$  に対して、 $\{f\}$  に関する正則被を  $M$  の上の  $f$  の正則領域、または単に  $M$  の上の正則領域という。更に  $\mathcal{F}$  が  $D$  上の正則函数全体の族のとき、 $(D, \varphi)$  の  $\mathcal{F}$  に関する正則被を単に  $(D, \varphi)$  の正則被という。

$(D, \varphi)$  の  $M$  の上の領域とする。次の条件をみたす  $(D', \varphi', \lambda)$  を  $(D, \varphi)$  の被覆領域という：

$\lambda$  は  $M$  の上の領域  $(D', \varphi')$  より  $M$  の上の領域  $(D, \varphi)$  の上への写像で、 $D$  の各点に対し近傍  $U$  で  $\lambda$  が  $\lambda^{-1}(U)$  の各連結成分を  $U$  の上に両正則に写すようなものがある。

次の条件を満たす  $(D, \varphi)$  の被覆領域  $(D^\#, \varphi^\#, \lambda)$  を  $(D, \varphi)$  の普遍被覆領域という：

$(D, \varphi)$  の任意の被覆領域を  $(D', \varphi', \lambda')$  とすると  $(D^\#, \varphi^\#, \mu)$  が  $(D', \varphi')$  の被覆領域であるような  $\lambda = \lambda' \circ \mu$  をみたす  $\mu$  がある。 $(D, \varphi)$  の被覆領域  $(D', \varphi', \lambda')$  が  $(D, \varphi)$  の普遍被覆領域であるための必要十分条件は  $D'$  が単連結なことである。

さて  $(D, \varphi)$  を  $M$  の上の領域、 $(D^\#, \varphi^\#, \lambda)$  をその普遍被覆領域とする。 $\lambda$  は標準的写像  $\lambda^*: H^1(D, \mathcal{O}_L) \rightarrow H^1(D^\#, \mathcal{O}_L)$  を導びく。

$$\#H^1(D, \mathcal{O}_L) = \lambda^*(H^1(D, \mathcal{O}_L))$$

は  $H^1(D^\#, \mathcal{O}_L)$  の部分群である。また  $\alpha \in H^1(D, \mathcal{O}_L)$  に対しても、 $\alpha^\# = \lambda^*(\alpha) \in H^1(D^\#, \mathcal{O}_L)$  とおく。

**補題3**  $L$  を可換な  $p$  次元の複素 Lie 群、 $(D, \varphi)$  を  $\#H^1(D, \mathcal{O}_L) = 0$  をみたす  $C^n$  の上の領域、 $(D^\#, \varphi^\#, \lambda)$  を  $(D, \varphi)$  の普遍被覆領域とする。 $C^n$  の中の任意の  $(n-1)$  次元の解析的平面  $H$  と  $\varphi^{-1}(H)$  上の任意の正則函数  $u$  に対して、 $D^\#$  上の正則函数  $F$  で  $\varphi^{\#-1}(H) = \lambda^{-1}(\varphi^{-1}(H))$  上では  $F = u \circ \lambda$  をみたすようなものがある。

**証明** 補題2より  $L$  は連結であると仮定してよい。よく知られた様に  $(C^p, x)$  が  $L$  の普遍被覆群であるような、つまり  $(C^p, x)$  が  $L$  の普遍被覆領域で  $x$  が準同型対応である様な、 $x$  がある。このとき  $x$  の核  $N$  は  $L$  の基本群と同型な  $C^p$  の discrete subgroup である。

$\varphi^{-1}(H)$  の近傍  $V$  と  $V$  上の正則函数  $u'$  で  $\varphi^{-1}(H)$  上で  $u' = u$  をみたすものがある。 $W = D - \varphi^{-1}(H)$  とおけば、 $\{V, W\}$  は  $D$  の開被覆である。

$$\chi(u' / z_1 \circ \varphi, 0, \dots, 0) \in H^0(V \cap W, \mathcal{O}_L)$$

を考える。 ${}^{\#}H^1(D, \mathcal{O}_L) = 0$ であるから、補題2より  $A \in H^0(\lambda^{-1}(V), \mathcal{O}_L)$ ,  $B \in H^0(\lambda^{-1}(W), \mathcal{O}_L)$  で  $\lambda^{-1}(V \cap W)$  上で

$$\chi(u' \circ \lambda / z_1 \circ \varphi^{\#}, 0, \dots, 0) = AB^{-1}$$

をみたすものがある。 $(C^p, \chi)$  は  $L$  の被覆領域であるから、 $\lambda^{-1}(V \cap W)$  の単連結な部分領域の上で vector 値正則函数  $a = (a_1, \dots, a_p)$ ,  $b = (b_1, \dots, b_p)$  で  $A = \chi(a)$ ,  $B = \chi(b)$  をそこでみたすものがある。 $\chi$  は準同型対応であることを考えると、もつとうまく  $a, b$  をえらべば、そこで

$$(z_1 \circ \varphi^{\#}) a = (u' \circ \lambda, 0, \dots, 0) + (z_1 \circ \varphi^{\#}) b$$

が成立する。更に  $a, b$  は  $\lambda^{-1}(V), \lambda^{-1}(W)$  内の任意の曲線にそつて解析接続できる。それら接続を同じ  $a, b$  で表わすと、一致の定理より  $\lambda^{-1}(V \cap W)$  の任意の部分領域に対して、定まつた  $C \in \mathbb{N}$  があつて、そこで

$$(z_1 \circ \varphi^{\#}) a = (u' \circ \lambda, 0, \dots, 0) + (z_1 \circ \varphi^{\#}) b + (z_1 \circ \varphi^{\#}) C$$

が成立する。上式より  $(z_1 \circ \varphi^{\#}) a_1$  は  $D^{\#}$  内の任意の曲線にそつて解析接続できる。 $D^{\#}$  は単連結であるから、一価の原理よりこれは  $D^{\#}$  上の一価正則函数  $F$  を与える。再び上式より

$$F = u \circ \lambda$$

が  $\varphi^{\#-1}(H)$  にて成立する。

命題 1.  $(D, \varphi)$  を  $C^2$  の上の領域とする。可換な複素 Lie 群  $L$  に対して  $H^1(D, \mathcal{O}_L) = 0$  が成立すれば、 $(D, \varphi)$  は正則領域である。

証明 ある  $H$  につき  $\varphi^{-1}(H)$  の境界である様な点よりなる  $\partial D$  の部分集合は  $\partial D$  にて稠密である。ところで  $\varphi^{-1}(H)$  は開 Riemann 面であるから Behnke-Stein [2] により正則凸である。したがつて  $\varphi^{-1}(H)$  の各境界点にて非有界であるような正則函数  $u$  がある。この  $u$  に対する補足定理 3 の  $F$  は  $D^{\#}$  上で正則で  $\varphi^{-1}(H)$  の境界点であるような  $\partial D$  の点の上の点にて非有界である。上のような点は  $\partial D^{\#}$  にても稠密であるから、 $\partial D^{\#}$  の各点は Bochner-Martin [4] の意味で frontier property を持つ。したがつて、 $D^{\#}$  上の一つの正則函数  $G$  で  $\partial D^{\#}$  の各点にて非有界なものがある。 $(D^{\#}, \varphi^{\#})$  は  $G$  の正則領域  $(D', \varphi')$  の被覆領域であるから、

$(D', \varphi')$  は  $(D, \varphi)$  の被覆領域である。例えば Oka [15] を用いて、ある領域とその被覆領域とは同時に正則領域になるので、 $(D, \varphi)$  も正則領域である。(Stein [16] 参照)。

補題 3 の証明の内容と同様な論法を用いて、帰納法により、高次元の場合は次の命題を得る。

命題 2.  $H = \{z; z_{q_1} = a_1, \dots, z_{q_{n-m}} = a_{n-m}\} \quad (2 \leq m \leq n)$  なる形をした任意の解析的平面  $H$  に対して  $\# H^1(\varphi^{-1}(H), \mathcal{O}_L) = 0$  をみたす  $C^n$  の領域  $(D, \varphi)$  は正則領域である。

## § 2. 正則函数の広義一様近似

次の条件をみたす  $\mathcal{S} = \{(D_n, \varphi_n); \tau_n^n\}$  を複素多様体  $M$  の上の領域の増加列という：

- (1) 各  $(D_n, \varphi_n)$  は  $M$  の上の領域である。
- (2) 各  $\tau_m^n \quad (n \leq m)$  は  $(D_n, \varphi_n)$  より  $(D_m, \varphi_m)$  の中への写像で  $n \leq m \leq \rho$  のとき  $\tau_\rho^n = \tau_\rho^m \circ \tau_m^n$  をみたす。

次の条件をみたす  $(\tau_n, D, \varphi)$  , また単に  $(D, \varphi)$  , を  $\mathcal{S}$  の極限という。

- (1)  $(D, \varphi)$  は  $M$  の上の領域である。
- (2) 各  $\tau_n$  は  $(D_n, \varphi_n)$  より  $(D, \varphi)$  の中への写像で  $n \leq m$  に対して  $\tau_n = \tau_m \circ \tau_m^n$  をみたす。
- (3)  $(\tau'_n, D', \varphi')$  が (1)(2) をみたせば、 $(D, \varphi)$  より  $(D', \varphi')$  の中への写像  $\psi$  で  $\tau'_n = \psi \circ \tau_n$  をみたすものがある。

[10] で述べたように  $\mathcal{S}$  の極限は一意的に存在し、次の性質をもつ。

補題 4.  $\{(D_n, \varphi_n); \tau_m^n\}$  を  $M$  の上の領域の増加列、 $(\tau_n, D, \varphi)$  をその極限とする。

$D$  の中の任意のコンパクト集合  $K$  に対して、自然数  $m$  と  $D_m$  の中のコンパクト集合  $K'$  で、 $\tau_m|_{K'}$  が  $K'$  を  $K$  の上に両正則に写すようなものがある。

$\tau$  を Stein 多様体  $S$  の上の領域  $(D_1, \varphi_1)$  より  $S$  の上の領域  $(D_2, \varphi_2)$  の中への写像、  
 $(\lambda_1, \tilde{D}_1, \tilde{\varphi}_1) \quad (u_2, \tilde{D}_2, \tilde{\varphi}_2)$  を、それぞれ  $(D_1, \varphi_1)$  ,  $(D_2, \varphi_2)$  の正則被とする。可換図をもつ  $\tilde{D}_1$  より  $\tilde{D}_2$  の中への  
 正則写像  $\tilde{\tau}$  の存在が示され、この  $\tilde{\tau}$  を  $\tau$  の  $(\tilde{D}_1, \tilde{\varphi}_1)$  への解析接続

$$\begin{array}{ccc} D_1 & \xrightarrow{\tau} & D_2 \\ \downarrow \lambda_1 & & \downarrow \lambda_2 \\ \tilde{D}_1 & \xrightarrow{\tilde{\tau}} & \tilde{D} \end{array}$$

という。

さて  $S$  の上の領域の増加列  $\{(D_n, \varphi_n); \tau_m^n\}$  とその極限  $(\tau_n, D, \varphi)$  を考える。

$(\lambda_n, \widetilde{D}_n, \widetilde{\varphi}_n)$ ,  $(\lambda, \widetilde{D}, \widetilde{\varphi})$  を, それぞれ,  $(D_n, \varphi_n)$ ,  $(D, \varphi)$  の正則被,  $\widetilde{\tau}_m^n$ ,  $\widetilde{\tau}_n$  を, それぞれ,  $\tau_m^n, \tau_n$  の  $(\widetilde{D}_n, \widetilde{\varphi}_n)$  への解析接続とすると

補題 5.  $\{(D_n, \varphi_n); \tau_m^n\}$  を Stein 多様体  $S$  の上の領域の増加列,  $(\tau_n, D, \varphi)$  をその極限とする。  $\{(\widetilde{D}_n, \widetilde{\varphi}_n); \widetilde{\tau}_m^n\}$  は  $S$  の上の領域の増加列で,  $(\widetilde{\tau}_n, \widetilde{D}, \widetilde{\varphi})$  はその極限である。

$\tau$  を複素多様体  $M$  の上の領域  $(D_1, \varphi_1)$  より  $M$  の上の領域  $(D_2, \varphi_2)$  の中への写像,  $(D_1^\#, \varphi_1^\#, \lambda_1)$ ,  $(D_2^\#, \varphi_2^\#, \lambda_2)$  を, それぞれ,  $(D_1, \varphi_1)$ ,  $(D_2, \varphi_2)$  の普遍被覆領域とする。可換図

$$\begin{array}{ccc} D_1^\# & \xrightarrow{\tau^\#} & D_2^\# \\ \downarrow \lambda_1 & & \downarrow \lambda_2 \\ D_1 & \xrightarrow{\tau} & D_2 \end{array}$$

をもつ  $D_1^\#$  より  $D_2^\#$  の中への正則写像  $\tau^\#$  の存在が示され,  $\tau^\#$  を  $\tau$  より導かれる  $D_1^\#$  より  $D_2^\#$  の中への写像という。

さて  $M$  の上の領域の増加列  $\{(D_n, \varphi_n); \tau_m^n\}$  とその極限  $(\tau_n, D, \varphi)$  を考える。  
 $(\lambda_n, D_n^\#, \varphi_n^\#)$ ,  $(\lambda, D^\#, \varphi^\#)$  を, それぞれ,  $(D_n, \varphi_n)$ ,  $(D, \varphi)$  の普遍被覆領域とする。 $C_m^\#, \tau_m^\#$  を, それぞれ,  $\tau_m^n, \tau_n$  より導かれる  $D_n^\#$  より  $D_m^\#$  の中への, 写像とすると

補題 6.  $\{(D_n, \varphi_n); \tau_m^n\}$  は  $M$  の上の領域の増加列,  $(\tau_n, D, \varphi)$  をその極限とする。 $\{(D_n^\#, \varphi_n^\#); \tau_m^{n\#}\}$  は  $M$  の上の領域の増加列で,  $(\tau_n^\#, D^\#, \varphi^\#)$  はその極限である。

補題 7.  $\{(D_n, \varphi_n); \tau_m^n\}$  を Stein 多様体  $S$  の上の領域の増加列,  $(\tau_n, D, \varphi)$  をその極限,  $\{K_n\}$  を  $K_n \subset K_{n+1}$ ,  $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$  をみたす  $D$  中のコンパクト集合の列とする。次の性質を持つ  $\{1, 2, \dots\}$  の部分列  $\{\nu_n\}$  がある:

(1)  $\tau_{\nu_n} \mid K_n'$  が  $K_n'$  を  $K_n$  の上に両正則に写すような  $D_{\nu_n}$  中のコンパクト集合  $K_{\nu_n}$  がある。

(2)  $D_{\nu_n}$  上の任意の正則関数  $f_n$  と任意の

$\varepsilon_n > 0$  に対して

$$|F_n \circ \tau_{\nu_n} - f_n| < \varepsilon_n$$

を  $K'_n$  上でみたす様な  $D$  上の正則函数  $F_n$  がある。

証明  $(\lambda_n, \tilde{D}_n, \tilde{\varphi}_n)$ ,  $(\lambda, \tilde{D}, \tilde{\varphi})$  を, それぞれ,  $(D_n, \varphi_n)$ ,  $(D, \varphi)$  の正則数とすると, 補題5より  $(\tau_n, \tilde{D}, \tilde{\varphi})$  は  $\{(\tilde{D}_n, \tilde{\varphi}_n) : \tilde{\tau}_n^n\}$  の極限である。Docquier-Grauert [8] により  $\tilde{D}$  は正則凸であるから

$$\lambda(K_n) \subset P_n \subset P_{n+1}.$$

をみたすような  $\tilde{D}$  中の解析的多重円筒の列  $\{P_n\}$  がある。補題4より  $\{1, 2, \dots\}$  の部分列  $\{\nu_n\}$  で, それぞれ,  $\tau_{\nu_n}, \tilde{\tau}_{\nu_n}$  が  $D_{\nu_n}$  中のコンパクト集合  $K'_n, \tilde{D}_{\nu_n}$  中の相対コンパクト開集合  $P'_n$  を,  $K'_n, P_n$  の上に両正則にうつし,

$$\tau_{\nu_{n+1}}^{\nu_n}(P'_n) \subset P'_{n+1}, \lambda_{\nu_n}(K'_n) \subset P'_n$$

をみたすようなものがある。

さて  $f_n$  を  $D_{\nu_n}$  上の任意の正則函数とする。 $(\tilde{D}_{\nu_n}, \varphi_{\nu_n})$  は  $(D_{\nu_n}, \varphi_{\nu_n})$  の正則被であるから,  $f_n$  の  $(\tilde{D}_{\nu_n}, \tilde{\varphi}_{\nu_n})$  への解析接続  $\tilde{f}_n$  がある。すると合成函数

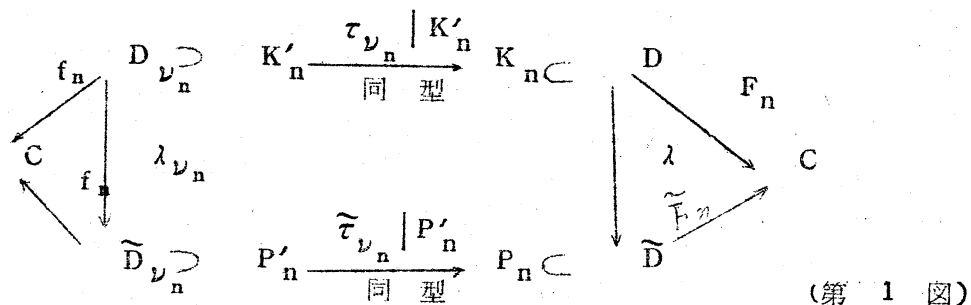
$\tilde{f}_n \circ (\tilde{\tau}_{\nu_n}|P'_n)^{-1}$  は  $P_n$  上で正則である。 $P_n$  は  $\tilde{D}$  の解析的多重円板であるから, Behnke [1] より  $\tilde{D}$  の正則函数  $\tilde{F}$  で  $K_n$  上で

$$|\tilde{F}_n - \tilde{f}_n \circ (\tilde{\tau}_{\nu_n}|P'_n)^{-1}| < \epsilon_n$$

をみたすようなものがある。合成函数  $F_n = \tilde{F}_n \circ \lambda$  は  $K_n$  上で

$$|F_n \circ \tau_{\nu_n} - f_n| < \epsilon_n$$

をみたす。(第1図参照)





### § 3. Cohomology 群の極限

$\{(D_n, \varphi_n); \tau_m^n\}$  を多様体  $M$  の上の領域の増加列,  $(\tau_n, D, \varphi)$  をその極限,  $L$  を複素 Lie 群とする.  $\tau_m^n$  は  $n \leq m \leq l$  に対して  $\pi_n^l = \pi_n^m \circ \pi_m^l$  をみたすような標準的写像  $\pi_n^m$ :

$$H^1(D_m, \mathcal{O}_L) \rightarrow H^1(D_n, \mathcal{O}_L) \text{ を導びく.}$$

$\{H^1(D_n, \mathcal{O}_L); \pi_n^m\}$  は有向集合  $\{1, 2, \dots\}$  の上の Eilenberg-Steenrod [9] の意味での inverse system を形成している. その inverse limit を  $\lim H^1(D_n, \mathcal{O}_L)$  で表わし, 標準的写像  $\pi_n: \lim H^1(D_n, \mathcal{O}_L) \rightarrow H^1(D_n, \mathcal{O}_L)$ ,  $\pi: H^1(D, \mathcal{O}_L) \rightarrow \lim H^1(D_n, \mathcal{O}_L)$  を考える. 位相空間  $X$  の上の群の層  $\mathcal{F}$  を係数とする 1 次の cohomology 集合  $H^1(X, \mathcal{F})$  の元  $\alpha$  が, ある  $X$  の開被覆  $\mathcal{U} = \{U_i; i \in I\}$  の  $\{f_i, f_j^{-1}\}$  の標準的像であるとき, (あまりよくないが簡単のために)  $\alpha = 0$  と記す.  $H^1(X, \mathcal{F})$  の任意の元  $\alpha$  が  $\alpha = 0$  をみたすとき  $H^2(X, \mathcal{F}) = 0$  と記す.

補題 8.  $\{(D_n, \varphi_n); \tau_m^n\}$  を Stein 多様体  $S$  の上の単連結な領域  $D_n$  の増加列,  $(\tau_n, D, \varphi)$  をその極限とする. また  $(C^p, \chi)$  が複素 Lie 群  $L$  の neutral element  $e$  を含む連結成分  $L_e$  の上の普遍被覆領域とする. このとき標準的写像  $\pi: H^1(D, \mathcal{O}_L) \rightarrow \lim H^1(D_n, \mathcal{O}_L)$  にて  $\alpha \in H^1(D, \mathcal{O}_L)$  が  $\pi(\alpha) = 0$  をみたせば,  $\alpha = 0$  である.

証明  $a \in L$  を含む  $L$  の連結成分を  $L_a$  とする.  $C^p$  にて

$$x_a(z) = a \cdot x(z)$$

にて  $x_a$  を定義すると,  $(C^p, x_a)$  は  $L_a$  の普遍被覆領域である. さて

$$K_n \subset K_{n+1}, \quad D = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$$

をみたす様な  $D$  の中のコンパクト集合の列を  $\{K_n\}$  とする. この  $\{K_n\}$  に対して補題 7 を適用すると (1), (2) をみたす  $\{1, 2, \dots\}$  の部分列  $\{\nu_n\}$  と列  $\{K'_n\}$  が存在する. しかもこの場合  $\nu_n = n$  と仮定しても一般性を失わない.

今からしばらくこの証明の中においてのみ  $C^P$  の点を太字で表わす。また群の逆元を示す  $-1$  も太字  $-1$  で表わす。  $x(e) = e$  をみたす  $C^P$  の点  $e$  がある。  $C^P$  にてユークリッドの距離  $d$  を考えよう。  $x$  が  $W'$  を  $C$  の近傍  $W'$  の上に両正則に写すような  $e$  を中心、半径  $r$  の  $C^P$  の開球  $W'$  がある。  $a, b \in W'$  に対して

$$\text{dist}(a, b) = \text{dist}((x|W')^{-1}a, (x|W')^{-1}b), \\ \|a\| = \text{dist}(e, a)$$

$$W = \{z; \text{dist}(e, z) < \frac{r}{2}\}, W = x(W)$$

とおく。  $(x, y) \rightsquigarrow xy$  は  $L \times L$  より  $L$  の上への連続写像であるから、任意の  $\varepsilon > 0$  に対して次の条件をみたす  $\delta(\varepsilon)$  がある:

$0 < \delta(\varepsilon) < \varepsilon$ ,  $a, b \in W$  が  $\|b\| < \delta(\varepsilon)$  をみたせば  $ab \in W'$  で  $\text{dist}(a, ab) < \varepsilon$ , 補題 1 より次のことを示せば十分である:

$D$  の開被覆  $\mathcal{U} = \{U_i; i \in I\}$  と各  $n$  に対して、各  $\tau_n^{-1}(U_i) \cap \tau_n^{-1}(U_j) \neq \emptyset$  にて

$$f_{ij} \circ \tau_n = h_i^n (h_j^n)^{-1}$$

をみたすような  $\{h_i^n\} \in C^0(\tau_n^{-1}(\mathcal{U}), \mathcal{O}_L)$  があれば、  
 $\{f_{ij}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_L)$  は各  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  にて

$$f_{ij} = f_i f_j^{-1}$$

をみたすような  $\{f_i\} \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}_L)$  をもつ。

ただし  $\tau_n^{-1}(\mathcal{U}) = \{\tau_n^{-1}(U_i); i \in I\}$  は  $D_n$  の開被覆である。  $\tau_1^{-1}(U_i)$  にて

$$f^1 = (h_i^1)^{-1} (h_2^1 \circ \tau_2^1)$$

とおけば、  $f^1 \in H^0(D_1, \mathcal{O}_L)$  はうまく定義できる。  $D_1$  が連結であるから、ある  $a_1 \in L$  に対して  $f^1(D_1) \subset L_{a_1}$  が成立する。簡単のため  $x_1 = x_{a_1}$  とおく。  $D_1$  が単連結で、

$(C^P, x_1)$  が  $L_{a_1}$  の普遍被覆領域であるから、一価性の原理より  $f^1 = x_1 \circ F^1$  をみたすよ

うな  $D_1$  上の vector 値正則函数  $F^1$  がある。補題 7 の条件(2)が成立しているから  $D$  上の

vector 値正則函数  $H^1$  で  $F^1$  は  $K'_1$  上で一様に近似できるから、写像  $f^1(x_1 \circ H^1 \circ \tau_1)^{-1}$  による  $K'_1$  の像が  $W$  に含まれ  $K'_1$  上で

$$\|f^1(x_1 \circ H^1 \circ \tau_1)^{-1}\| < \delta(r 2^{-3})$$

が成立するような  $H^1$  がある。次に

$\{g_i^1\} = \{h_i^1\} \in C^0(\tau_2^{-1}(\mathcal{U}), \mathcal{O}_L)$  とおき、各  $\tau_2^{-1}(U_i)$  上にて

$$g_i^2 = h_i^2 (x_1 \circ H^1 \circ \tau_2)^{-1}$$

とおくと、 $\{g_i^2\} \in C^0(\tau_2^{-1}(\mathcal{U}), \mathcal{O}_L)$  に対し、各  $\tau_2^{-1}(U_i) \cap \tau_2^{-1}(U_j) \neq \emptyset$  にて

$$f_{ij} \circ \tau_2 = g_i^2 (g_j^2)^{-1}$$

が成立する。各  $\tau_1^{-1}(U_i)$  上で

$$g^{1,2} = (g_i^1)^{-1} (g_i^2 \circ \tau_2^1)$$

とおくと、 $g^{1,2} \in H^0(D_1, \mathcal{O}_L)$  はうまく定義され、写像  $g^{1,2}$  による  $K'_1$  の像は  $W$  に含まれ  $K'_1$  にて

$$\|g^{1,2}\| < \delta (r 2^{-3})$$

が成立している。次の条件をみたす

$\{g_i^1\} \in C^0(\tau_1^{-1}(\mathcal{U}), \mathcal{O}_L), \dots, \{g_i^m\} \in C^0(\tau_m^{-1}(\mathcal{U}), \mathcal{O}_L)$

が定義されたと仮定しよう：

(1)  $1 \leq n \leq m$  をみたす各  $n$  に対し、各  $\tau_n^{-1}(U_i) \cap \tau_n^{-1}(U_j)$  にて

$$f_{ij} \circ \tau_n = g_i^n (g_j^n)^{-1}$$

(2)  $1 \leq n < \ell \leq m$  をみたす各  $n, \ell$  に対し、各  $\tau_n^{-1}(U_i)$  にて

$$g^{n,\ell} = (g_i^n)^{-1} (g_i^\ell \circ \tau_\ell^n)$$

とおけば、 $g^{n,\ell} \in H^0(D_n, \mathcal{O}_L)$  はうまく定義され、写像  $g^{n,n+1}$  による  $K'_n$

の像は  $W$  に含まれ  $K'_n$  で

$$\|g^{n,n+1}\| < \delta (r 2^{-n-2})$$

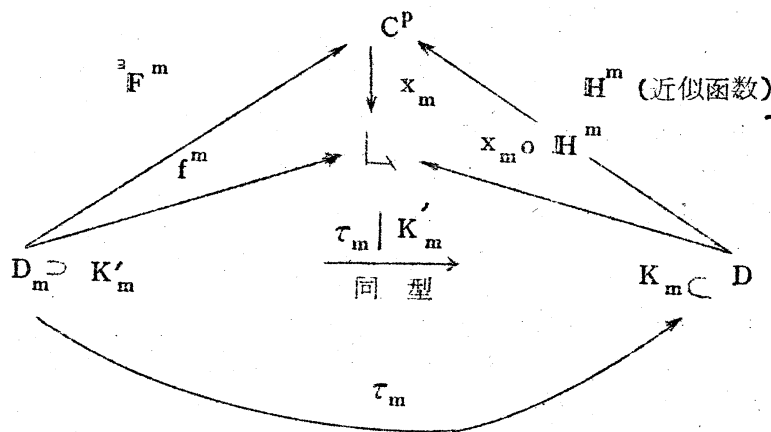
が成立している。各  $\tau_m^{-1}(U_i)$  上で

$$f^m = (g_i^m)^{-1} (h_i^{m+1} \circ \tau_{m+1}^m)$$

とおけば,  $f^m \in H^0(D_m, \mathcal{O}_L)$  はうまく定義される。  $D_m$  は連結だから, ある  $a_m \in L$  に対して  $f^m(D_m) \subset L_{a_m}$  が成立する。  $x_m = x_{a_m}$  とおき, 上の議論をくり返すと (第2図参照), 写像  $f^m(x_m \circ H^m \circ \tau_m)^{-1}$  による  $K'_m$  の像が  $W$  に含まれ  $K_f$  上で

$$\| f^m(x_m \circ H^m \circ \tau_m)^{-1} \| < \delta (r 2^{-m-2})$$

が成立するような  $D$  上の vector 値函数  $H^m$  がある。



(第 2 図)

各  $\tau_{m+1}^{-1}(U_i)$  上で

$$g_i^{m+1} = h_i^{m+1} (x_m \circ H^m \circ \tau_{m+1})^{-1}$$

とおけば, 各  $\tau_{m+1}^{-1}(U_i) \cap \tau_{m+1}^{-1}(U_j) \neq \emptyset$  にて

$$f_{ij} \circ \tau_{m+1} = g_i^{m+1} (g_j^{m+1})^{-1}$$

が成立する。各  $\tau_m^{-1}(U_i)$  上で

$$g^{m,m+1} = (g_i^m)^{-1} (g_i^{m+1} \circ \tau_{m+1}^m)$$

とおけば,  $g^{m,m+1} \in H^0(D_m, \mathcal{O}_L)$  はうまく定義され, 写像  $g^{m,m+1}$  による  $K'_m$  の像は  $W$  に含まれ,  $K'_m$  上で

$$\| g^{m,m+1} \| < \delta (r 2^{-m-2})$$

が成立する。かくして帰納法により(1), (2)をみたす  $\{g_i^m\} \in C^0(\tau_m^{-1}(\mathcal{U}), \mathcal{O})$  の存在が  $m=1, 2, \dots$  に対して示された。

さて写像  $g^{n,m}$  による  $K'_m$  の像は  $W$  に含まれ  $K'_n$  上で

$$\|g^{n,m}\| < r 2^{-n-1}, \text{dist}(g^{n,m}, g^{n,m+1}) < r 2^{-m-3}$$

が成立する。したがって  $D_n$  上の vector 値正則函数列  $\{(X|W)^{-1} \circ g^{n,m}; m=n, n+1, \dots\}$  は  $\tau_n^{n-1}(K'_{n-1})(\subset K'_n)$  にてその上の vector 値正則函数  $G^n$  に一様収束する。しかも  $\tau_n^{n+1}(K'_{n-1})$  上で

$$\text{dist}(G, G^n) < r 2^{-n}$$

が成立しているから,  $\{g^{n,m}; m=n, n+1, \dots\}$  は  $\tau_n^{n-1}$  にて

$$g^n = x \circ G^n \in H^0(\tau_n^{n-1}(K'_{n-1}), \mathcal{O}_L)$$

に収束する。各  $i \in I$  に対して,  $U_i \subset K_{n-1}$  をみたす  $n$  をとり,  $U_i$  にて

$$f_i = (g_i^n \circ g^n) \circ (\tau_n|K'_n)^{-1}$$

とおけば,  $\{f_i\} \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}_L)$  はうまく定義され, 各  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  にて

$$f_{ij} = f_i(f_j)^{-1}$$

が成立する。

補題8の証明において  $L=C$  のときは各  $D_n$  が単連結であることを仮定する必要がないので,

$\mathcal{O} = \mathcal{O}_C$  とおけば

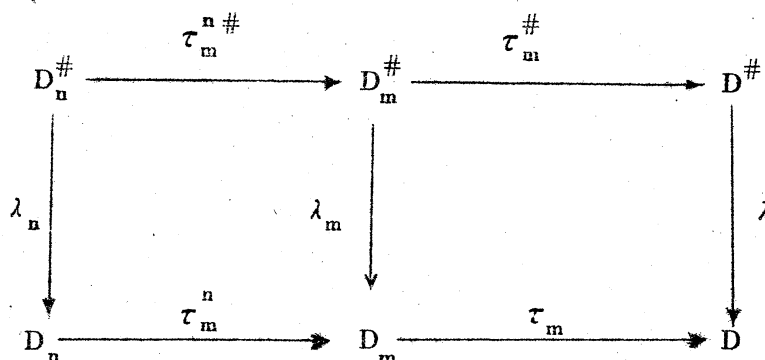
系。  $\{(D_n, \varphi_n)\}$  を Stein 多様体  $S$  の上の領域の増加列,  $(D, \varphi)$  をその極限とすれば, 標準的写像  $H^1(D, Q) \rightarrow \lim H^1(D_n, Q)$  は単射である。

$\{(D_n, \varphi_n); \tau_m^n\}$  を複素多様体  $M$  の上の領域の増加列,  $(\tau_n, D, \varphi)$  をその極限,  $(D_n^\#, \varphi_n^\#, \lambda_n), (D^\#, \varphi^\#, \lambda)$  を, それぞれ,  $(D_n, \varphi_n), (D, \varphi)$  の普遍被領域,  $\tau_m^{n\#} : (D_n^\#, \varphi_n^\#) \rightarrow (D_m^\#, \varphi_m^\#), \tau_n^\# : (D_n^\#, \varphi_n^\#) \rightarrow (D^\#, \varphi^\#)$  を, それぞれ,  $\tau_m^n, \tau_n$  より導かれる写像とする。補題6より  $\{(D_n^\#, \varphi_n^\#); \tau_m^{n\#}\}$  は  $M$  の上の領域の増加列で,  $(\tau_n^\#, D^\#, \varphi^\#)$  はその極限である。すると  $\tau_n \circ \lambda_n : D_n^\# \rightarrow D$  は標準的

写像  $\pi^\# : H^1(D, \mathcal{O}_L) \rightarrow \lim H^1(D_n^\#, \mathcal{O}_L)$  を導く。

補題 9.  $\{(D_n, \varphi_n) : \tau_m^n\}$  を Stein 多様体  $S$  の上の領域の増加列,  $(\tau_n, D, \varphi)$  をその極限とする。また  $(C^p, x)$  が複素 Lie 群  $L$  の neutral element  $e$  を含む連結成分  $Le$  の上の普遍被覆領域とする。このとき標準的写像  $\pi^\# : H^1(D, \mathcal{O}_L) \rightarrow \lim H^1(D_n^\#, \mathcal{O}_L)$  にて  $\alpha \in H^1(D, \mathcal{O}_L)$  が  $\pi^\#(\alpha) = 0$  をみたせば,  $\alpha = 0$  である。

証明 第 3 図にて可換律が成立する。



(第 3 図)

補題 1 より  $D$  の開被覆  $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ ,  $\{f_{ij}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_L)$  に対して各  $n$  について  $\{f_{ij} \circ \tau_n \circ \lambda_n\} \in B^1(\lambda_n^{-1}(\tau_n^{-1}(\mathcal{U})), \mathcal{O}_L)$  が成立すれば,  $\mathcal{U}$

$\{f_{ij} \circ \lambda\} \in B^1(\lambda^{-1}(\mathcal{U}), \mathcal{O}_L)$  であることを示せばよい。各  $n$  について

$\tau_n \circ \lambda_n = \lambda \circ \tau_n^\#$ , 各  $n$  について

$$\{f_{ij} \circ \lambda \circ \tau_n^\#\} \in B^1(\tau_n^{-1}(\lambda^{-1}(\mathcal{U})), \mathcal{O}_L)$$

が成立している。しかも各  $D_n^\#$  が単連結であるから, 補題 8 より次式を得る。

$$\{f_{ij} \circ \lambda\} \in B^1(\lambda^{-1}(\mathcal{U}), \mathcal{O}_L)$$

可換または可解であるような複素 Lie 群  $L$  に対して補題 9 の条件がみたされているから

命題 3.  $L$  を可換または可解な複素 Lie 群,  $\{(D_n, \varphi_n)\}$  を Stein 多様体の上の領域の

増加列,  $(D, \varphi)$  をその極限とする。Dが単連結ならば, 標準的写像  $\pi: H^1(D, \mathcal{L}_L) \rightarrow \lim H^1(D_n, \mathcal{L}_L)$  にて  $\alpha \in H^1(D, \mathcal{L}_L)$  が  $\pi(\alpha) = 0$  をみたせば,  $\alpha = 0$  である。

#### § 4. Cousin の領域の交わりについて

この節では文字Lはつねに任意の, しかし固定された, 可換な複素Lie群を表わすことにする。 $n$  箇の単連結な平面領域の直積Pを $C^n$ の単連結な多重円筒とよぶ。勿論  $H^1(P, \mathcal{L}_L) = 0$  が成立する。この節では  $H^1(D, \mathcal{L}_L) = 0$  をみたす領域の交わりについて調べ, その結果を用いて例のCartan-Behnke-Steinの定理の高次元かつ値がLに属する場合への拡張を試みよう。

$C^n$ の任意の相対コンパクトな単連結な多重円筒Pに対して  $H^1(G \cap P, \mathcal{L}_L) = 0$  をみたすような $C^n$ の開集合GをL-正規であるとよぶ。また  $G_p \subseteq G_{p+1}, \bigcup_{p=1}^{\infty} G_p = G$  をみたすような $C^n$ の開集合GをL-正規開集合列  $\{G_p\}$  で内部より近似されるという。

命題 4. 一つの可換な複素Lie群Lに対して, L-正規開集合列  $\{G_p\}$  で内部より近似される $C^n$ の領域Gは正則領域である。

証明  $1 \leq m < n, 1 < s_1 < \dots < s_{n-m} \leq n$  を任意の整数,  $c_{s_1}, \dots, c_{s_{n-m}}$  を任意の複素数とする。 $m$ 次元の解析面平面  $H = \{z; z_{s_1} = c_{s_1}, \dots, z_{s_{n-m}} = c_{s_{n-m}}\}$  を考える。 $\#H^1(G, \mathcal{L}_L) = \#H^1(G \cap H, \mathcal{L}_L) = 0$  を示そう。相対コンパクトな単連結な多重円板  $P_p = \{z; |z_1| < p, \dots, |z_n| < p\}$  に対して,  $G_p$  がL-正規であるから  $H^1(G_p \cap P_p, \mathcal{L}_L) = 0, \{G_p \cap P_p\}$  は $C^n$ の領域の増加列でGがその極限であるから, 補題9より  $\#H^1(G, \mathcal{L}_L) = 0$  をえる。次に  $\#H^1(G \cap H, \mathcal{L}_L) = 0$  であるが, そのためには $C^n$ が  $(z, w) = (z_1, \dots, z_m, w_1, \dots, w_{n-m})$  空間で

$H = \{(z, w); w_1 = \dots = w_{n-m} = 0\}$  であると仮定して一般性を失わない。

仮定より次の条件をみたす正数列  $\{\varepsilon_p\}, \{a_p\}$  がある (第4図参照)。

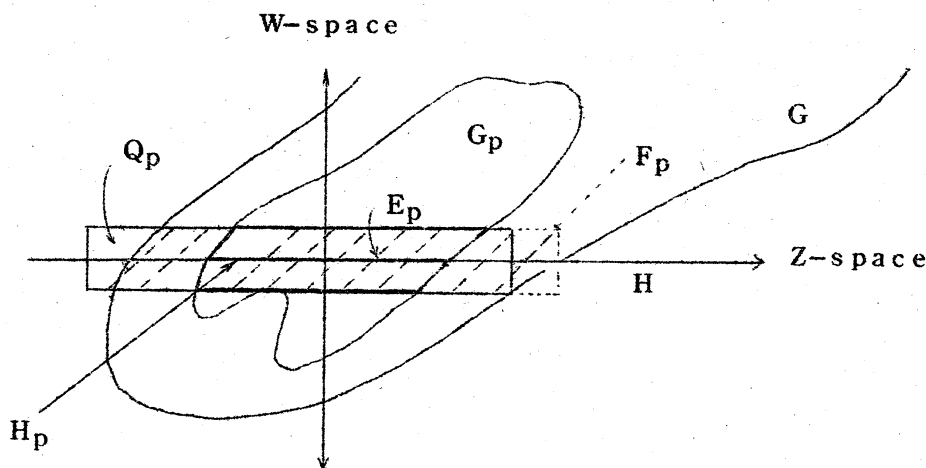
$$(1) \quad \varepsilon_1 > \dots > \varepsilon_p > \varepsilon_{p+1} > \dots, \varepsilon_p \rightarrow 0$$

$$a_1 < \dots < a_p < a_{p+1} < \dots, a_p \rightarrow \infty$$

$$(2) E_p \subset F_p \quad \text{ここに} \quad E_p = G_p \cap Q_p,$$

$$Q_p = \{ (z, w) ; |z_p| < a_p, |w_\mu| < \varepsilon_p \},$$

$$F_p = \{ (z, w) ; (z, 0) \in G \cap H, |w_\mu| < \varepsilon_p \}$$



(第 4 図)

$H_p = G \cap H \cap Q_p$  とおく。任意の  $G \cap H$  の開被覆  $\mathcal{U} = \{ U_i ; i \in I \}$  と

$\{ f_{ij} \} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_L)$  を考える。

$$V_i^p = \{ (z, w) ; (z, 0) \in G \cap H \} \cap E_p, \mathcal{V}^p = \{ V_i^p ; i \in I \}$$

とおけば  $\mathcal{V}^p$  は  $E_p$  の開被覆である。各

$$V_i^p \cap V_j^p = \{ (z, w) ; (z, 0) \in U_i \cap U_j \} \cap E_p \quad \text{にて}$$

$$F_{ij}^p(z, w) = f_{ij}(z)$$

とおけば,  $\{ F_{ij}^p \} \in Z^1(\mathcal{V}^p, \mathcal{O}_L)$  である。

一方  $G_p$  は  $L$ -正規であるから,  $H^1(E_p, \mathcal{O}_L) = 0$  である。補題 1 より  $\{ F_{ij}^p \}$  はある

$\{ F_i^p \} \in C^0(\mathcal{V}^p, \mathcal{O}_L)$  の coboundary である。

$$U_i^p = U_i \cap H_p, \mathcal{U}^p = \{ U_i^p ; i \in I \}$$



とおけば  $\mathcal{U}^p$  は  $\mathcal{U}$  の制限となる  $H_p$  の開被覆である。各  $U_i^p$  にて

$$f_i^{(p)}(z) = F_i^{(p)}(z, 0)$$

とおけば,  $\{f_{ij}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_L)$  の  $H_p$  への制限  $\{f_{ij}|_{H_p}\} \in Z^1(\mathcal{U}^p, \mathcal{O}_L)$

は  $\{f_i^p\} \in C^0(\mathcal{U}^p, \mathcal{O}_L)$  は coboundary である。

$\{f_{ij}\}$  の任意性と,  $\{H_p\}$  は領域の増加列で  $H$  がその極限であることより, 補題 9 を用いると  $\#H^1(G \cap H, \mathcal{O}_L) = 0$  をえる。

結局我々は命題 2 の条件が  $G$  に対して成立することを示したことになるから,  $G$  は正側領域である。 $R^n$  の開集合  $G$  の境界点  $x_0$  は次の条件が成立するとき  $G$  の連続な (またに擬凸な) 境界点と呼ばれる:

$\partial G \cap V = \{x = (x_1, \dots, x_n); x_j = g, x \in V\}$  をみたすような  $x_0$  の近傍  $V$  と  $V$  で連続な  $(n-1)$  変数  $x_2, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_n$  の実数値函数  $g$  がある。

(または  $G \cap V$  が正則開集合であるような  $x_0$  の近傍  $V$  がある。)

更に  $g$  が  $V$  で連続微分可能ならば,  $x_0$  は普通の意味での滑らかな境界点になる。

命題 5. 一つの可換な複素 Lie 群  $L$  に対して  $L$ -正規な  $C^n$  の開集合  $G$  はその連続な境界点  $z^0$  にて擬凸である。

証明  $z_j = x_j + \sqrt{-1} y_j$  とおく。

$$\partial G \cap V(\varepsilon) = \{z; x_1 < g(y_1, z_2, \dots, z_n), z \in V(\varepsilon)\}$$

をみたすような  $\varepsilon > 0$  と  $V(\varepsilon)$  で連続な変数  $y_1, z_2, \dots, z_n$  の実数値連続函数  $g$  があるとしてよい。ここに  $V(t) = \{z; |z_j - z_j^0| < t\}$  とおく。各  $0 \leq t < 1$  に対し

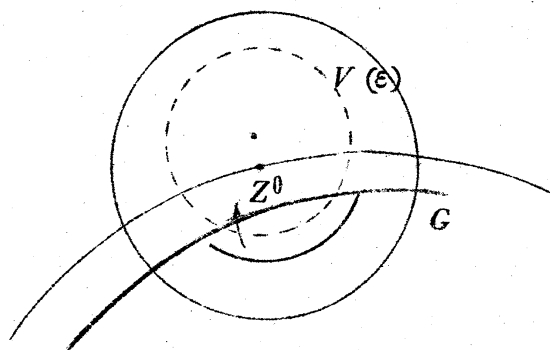
$$E_t = \{z; x_1 < g(y_1, z_2, \dots, z_n) - \frac{t\varepsilon}{2}, z \in V(\frac{1-t}{2})\}$$

とおくと, 平行移動  $w_1 = z_1 + \frac{t\varepsilon}{2}$ ,  $w_j = z_j$  ( $j \neq 1$ ) によつて  $E_t$  は  $w$ -空間の集合

$$\{w; u_1 < g(v_1, w_2, \dots, w_n), (w_1 - \frac{t\varepsilon}{2}, w_2, \dots, w_n) \in V(\frac{1-t}{2})\}$$

$$= G \cap \{w; (w_1 - \frac{t\varepsilon}{2}, w_2, \dots, w_n) \in V(\frac{1-t}{2})\}$$

に写される。(第 5 図 参照)。右辺の  $\{\}$  は相対コンパクトな単連結な多重円板で  $G$  は  $L$ -正規



(第 5 図)

であるから,  $E_t$  も  $L$ -正規である。すると  $E_0 = G \cap V(\frac{\varepsilon}{2})$  は  $L$ -正規開集合列  $\{E_t\}$  で内部より近似されるから, 命題 4 より  $E_0$  は正規領域である。

定理 1. 一つの可換な複素 Lie 群  $L$  に対して  $L$ -正規な連続な境界を持つ  $C^n$  の開集合  $G$  は正則領域である。

証明 Oka [15] と命題 5 より  $G$  は正則領域である。

補題 10. 任意の自然数  $p$  に対し, 準同型写像  $\alpha: GL(1, C) \rightarrow GL(p, C)$ ,  $\beta: GL(p, C) \rightarrow GL(1, C)$  で  $\beta \circ \alpha$  が  $GL(1, C)$  の恒等写像であるようなものがある。

証明 任意の  $z \in GL(1, C)$ ,  $w \in GL(p, C)$  に対し, それぞれ

$$d(z) = \begin{pmatrix} z & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta(w) = \det w$$

を考えればよい。

補題 11. 複素 Lie 群  $L, L'$  に対し準同型写像  $\alpha: L' \rightarrow L$ ,  $\beta: L \rightarrow L'$  で  $\beta \circ \alpha$  が  $L'$  の恒等であるようなものがあるとする。任意の複素数体  $X$  につき,  $\alpha$  の導く写像  $\pi: H^1(X, \mathcal{O}_{L'}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_L)$  は単射である。

証明  $X$  の任意の開被覆  $\mathcal{U} = \{U_i\}$  と  $\{f_{ij}\}, \{g_{ij}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_L)$  で

$\{f_i\} \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}_L)$  に対し  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  にて

$$f_i^{-1}(\alpha \circ f_{ij}) f_j = \alpha \circ g_{ij}$$

をみたすものを考える。すると  $\{\beta \circ f_i\} \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}_L)$  に対し、各  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  にて

$$(\beta \circ f_i)^{-1} f_{ij} (\beta \circ f_j) = g_{ij}$$

が成立する。

補題 10, 11 より

定理 2. 任意の自然数  $P$  について  $L = GL$ ,  $(P, C)$  に対しても、命題 1, 2, 4, 5 および定理 1 が成立する。

注意(1)  $L = C$  に対しては、 $L$ -正規の定義にて、 $H^1(G \cap P, \mathcal{O}) = 0$  の代りに、 $G \cap P$  が Cousin-I 型という条件でおきかえてよい。

(2)  $L$ -正規の定義における  $P$  としては各成分が二つの円板の交わりである弓形の領域の直積につまり二つの多重円板の交わりに限定しても、同じ結果を得る。

(3) Docquier-Grauert [8] を用いて、定理 1 を Stein 多様体の領域に拡張できる。

## 引 用 文 献

1. Behnke, H., Généralisation du théorème de Runge pour les fonctions multiformes des variables complexes. Coll. sur les fonct. des plus. var. Bruxelles (1953).
2. Behnke, H., und K. Stein, Analytische Funktionen mehrerer Veränderlichen zur vorgegebenen Null- und Pollstellenflächen. Jber. Deut. Math. Verein. 47 (1937), 177-192.
3. Behnke, H., Entwicklung analytischer Funktionen auf Riemannschen Flächen. Math. Ann. 120 (1948), 430-461.
4. Bochner, S., and W. T. Martin, Several complex variables. Princeton Univ. Press (1948).
5. Cartan, H., Les problèmes de Poincaré et de Cousin pour les fonctions de plusieurs variables complexes. C.R. Paris 199 (1934), 1284-1287.
6. Cartan, H., Sur les premières problèmes des Cousin. C. R. Paris 207 (1938), 558-560.
7. Cartan, H., et al. Théorie des fonctions de plusieurs variables: Sem. de Cartan, Ecole Norm. Sup. (1951-52).
8. Docquier, F., und H. Grauert, Levisches Problem und Rungescher Satz für Teilgebiete Steinscher Mannigfaltigkeit. Math. Ann. 140 (1960), 94-123.
9. Eilenberg, S., and N. Steenrod, Foundations of algebraic topology. Princeton Univ. Press.
10. Kajiwara, J., On the limit of a monotonous sequence of Cousin's domains. J. Math. Soc. Japan 17 (1965), 36-46.
11. Kajiwara, J., Some Characterizations of Stein manifold through the notion of locally regular boundary points. Kōdai Math. Sem. Rep. 16 (1964), 36-46.
12. Kajiwara, J., Note on a Cousin-II domain over  $C^2$ . Ibid. 17 (1965), 44-47.

13. Kajiwarara, J., Relations between domains of holomorphy and multiple Cousin's problems. Ibid., 261-272.
14. Oka, K., Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables: II Domaines d'holomorphie. J. Sci. Hiroshima Univ. 7 (1937), 115-130.
15. Oka, K., Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables: IX Domaines finis sans point critique intérieur. Jap. J. Math. 23 (1953), 97-155.
16. Stein, K., Überlagerungen holomorph- vollständiger komplexer Raume. Arch. Math. 7 (1956), 354-361.
17. Thullen, P., Sur les deusieme probleme de Cousin. C. R. Paris 200 (1953), 720-721.